

**Risoluzione**  
**Matematica finanziaria – 20 gennaio 2011**

Esercizio 1.

Un'impresa ha in corso l'ammortamento di un mutuo a tasso variabile EURIBOR, condotto con periodicità semestrale e con quote capitali costanti. In aggiunta, ha in corso un contratto IRS che prevede un tasso fisso pari all'1,75% semestrale. Il finanziamento ammortizzato in origine 7 anni fa era pari a 14 milioni e ora mancano tre anni esatti alla conclusione dell'ammortamento. Calcolare il fair value dell'IRS sapendo che la curva dei tassi a pronti EURIBOR6M è data da  $i(0; t) = 0,015 + 0,0025 \cdot (t - 1)$ .

Risoluzione.

Il piano d'ammortamento prevede 14 rate semestrali costanti d'importo pari a:

$$C = \frac{14.000.000}{14} = 1.000.000$$

Il debito residuo dopo quattro anni (quando mancano tre anni alla conclusione del piano) è pari a  $D_4 = 14.000.000 - 8 \cdot 1.000.000 = 6.000.000$ .

Le quote interesse fisse semestrali sono date da

$$QIFix_h = D_{h-1/2} \cdot 0,0175$$

Determiniamo ora le quote interesse variabili. Dalla curva dei tassi a pronti data (il tempo  $t$  è espresso su base annua) possiamo dedurre i tassi a pronti:

$$\begin{array}{l} i(0; 4) = 2,25\% \\ i(0; 4,5) = 2,375\% \\ i(0; 5) = 2,5\% \\ i(0; 5,5) = 2,625\% \\ i(0; 6) = 2,75\% \\ i(0; 6,5) = 2,825\% \\ i(0; 7) = 3,0\% \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} v(0; 4) = 0,9148 \\ v(0; 4,5) = 0,8998 \\ v(0; 5) = 0,8839 \\ v(0; 5,5) = 0,8672 \\ v(0; 6) = 0,8498 \\ v(0; 6,5) = 0,8317 \\ v(0; 7) = 0,8131 \end{array}$$

dove abbiamo tenuto conto della relazione

$$v(0; h) = [1 + i(0; h)]^{-h}$$

I tassi a termine si ottengono dalla relazione di non arbitraggio

$$v(0; n) = v(0; k) \cdot v(0; k; n) \quad \text{con } 0 < k < n$$

dalla quale si deduce

$$i(0; k; n) = \left( \frac{[1 + i(0; n)]^n}{[1 + i(0; k)]^k} \right)^{1/(n-k)} - 1$$

Si trovano di conseguenza i seguenti tassi a termine:

$$\left[ \begin{array}{l} i(0; 4; 4, 5) = 3,3805\% \\ i(0; 4, 5; 5) = 3,6319\% \\ i(0; 5; 5, 5) = 3,8834\% \\ i(0; 5, 5; 6) = 4,1351\% \\ i(0; 6; 6, 5) = 4,3869\% \\ i(0; 6, 5; 7) = 4,6389\% \end{array} \right.$$

Le quote interesse variabili semestrali sono date da

$$QIFloat_h = D_{h-1/2} \cdot i(0; h-1/2; h)$$

Il fair value dell'IRS si ottiene infine sommando i valori attuali della differenza tra quota interesse variabile e fissa a ogni epoca, in formule:

$$FV = \sum_h (QIFloat_h - QIFix_h) \cdot v(0, h) = 373.350,42$$

Il piano completo è:

t (anni)	C(t)	D(t)	QIFix(t)	i(0, t)	i(0, t-1/2, t)	v(0, t)	QIFloat(t)	QITV - QITF	Fair Value
4		6 000 000		2.250%					
4.5	1 000 000	5 000 000	105 000.00	2.375%	3.381%	0.8998	202 831.02	97 831.02	373 350.42
5	1 000 000	4 000 000	87 500.00	2.500%	3.632%	0.8839	181 594.53	94 094.53	
5.5	1 000 000	3 000 000	70 000.00	2.625%	3.883%	0.8672	155 336.60	85 336.60	
6	1 000 000	2 000 000	52 500.00	2.750%	4.135%	0.8498	124 052.69	71 552.69	
6.5	1 000 000	1 000 000	35 000.00	2.875%	4.387%	0.8317	87 738.29	52 738.29	
7	1 000 000	0	17 500.00	3.000%	4.639%	0.8131	46 388.89	28 888.89	

## Esercizio 2.

Siano dati sul mercato i seguenti titoli:

$$z_1 = (-95, 5; 100) / (0; 1)$$

$$z_2 = (-92; 100) / (0; 2)$$

e un titolo a termine scritto su  $z_2$  per consegna dopo un anno al prezzo forward  $F = 97,3$ . Mostrare con gli opportuni calcoli che è violata la relazione di non arbitraggio e si studi la strategia di arbitraggio che può essere compiuta per ottenere un unico saldo positivo all'epoca 2.

Dati i titoli  $z_1$  e  $F$ , si replichi il titolo  $b = (-X; 5; 105) / (0; 1; 2)$  e si calcoli il prezzo  $X$ .

## Risoluzione.

Partendo dai titoli  $z_1$  e  $z_2$  possiamo ricavare la struttura dei tassi a pronti e a termine:

$$m(0, 1) = \frac{100}{95,5} = 1,0471$$

$$m(0, 2) = \frac{100}{92} = 1,0870$$

$$m(0, 1, 2) = \frac{m(0, 2)}{m(0, 1)} = 1,0380$$

Il contratto forward in oggetto ha scadenziario  $F = (-97,3; 100) / (1; 2)$ .

Verifichiamo se il contratto  $F$  ha un prezzo coerente rispetto alla struttura dei tassi individuata prima:

$$100 \cdot v(0;1;2) = \frac{100}{m(0;1;2)} = \frac{100}{1,0380} = 96,3351 \neq 97,3$$

Deduciamo quindi che il prezzo di  $F$  è sovra-quotato. Possiamo quindi effettuare un'operazione di arbitraggio ottenuta vendendo l'operazione  $F$  e acquistando i titoli  $z_1$  e  $z_2$ . Il guadagno realizzato all'epoca *uno* è dato dalla differenza  $97,3 - 96,3351 = 0,9649$  mentre il guadagno ottenuto all'epoca *due* sarà dato da  $0,9649 \cdot m(0;1;2) = 1,0016$ .

Indichiamo con  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  le quote dei tre titoli con l'obiettivo di realizzare un arbitraggio per ottenere un unico saldo positivo all'epoca *due*.

La condizione richiesta si traduce quindi nel modo seguente:

$$(-95,5\alpha - 92\beta; 100\alpha + 97,3\gamma; 100\beta - 100\gamma) / (0;1;2) = (0;0;1,0016) / (0;1;2)$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} -95,5\alpha - 92\beta = 0 \\ 100\alpha + 97,3\gamma = 0 \\ 100\beta - 100\gamma = 1,0016 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -0,973 \\ \beta = 1,01 \\ \gamma = 1,00 \end{cases}$$

Vogliamo infine replicare il titolo  $b$  utilizzando i titoli  $z_1$  e  $F$ . Indichiamo con  $\lambda$  e  $\mu$  le quote incognite. Avremo perciò lo scadenziario:

$$(-95,5\lambda; 100\lambda - 97,3\mu; 100\mu) / (0;1;2) = (-X; 5; 105) / (0;1;2)$$

Si deduce immediatamente che

$$\begin{cases} -95,5\lambda = -X \Rightarrow X = 102,343 \\ 100\lambda - 97,3\mu = 5 \rightarrow \lambda = 1,0717 \\ 100\mu = 105 \rightarrow \mu = 1,05 \end{cases}$$

### Esercizio 3.

Un'azienda deve scegliere tra i seguenti investimenti alternativi:

A.  $(-5.000; X; 2.200) / (0;1;2)$

B.  $(-5.000; 2.100; 1.200, 2.300) / (0;1;2;3)$

L'operazione integrativa che rende confrontabili le due alternative consiste nel reinvestire i flussi in entrata dell'operazione A in capitalizzazione composta al tasso nominale  $J(2) = 6\%$ .

a) Determinare l'importo  $X$  tale che il progetto A abbia  $TIR = 5\%$ ;

b) In base al criterio del TIR determinare il miglior progetto tra A e B.

### Risoluzione.

Le due operazioni A e B hanno lo stesso esborso iniziale ma durata diversa. L'operazione integrativa consiste quindi nell'investire i flussi in entrata dell'operazione A fino all'epoca *tre*.

Conoscendo il tasso nominale si deduce  $i_{1/2} = 0,03$ .

Il montante all'epoca *tre* sarà perciò:

$$M_3 = X \cdot (1 + i_{1/2})^4 + 2.200 \cdot (1 + i_{1/2})^2 = 1,03^4 \cdot X + 1,03^2 \cdot 2.200$$

Affinché l'operazione A abbia TIR pari al 5%, dovremo imporre la condizione:

$$5.000 = M_3 \cdot 1,05^{-3}$$

ossia

$$1,03^4 \cdot X \cdot 1,05^{-3} + 1,03^2 \cdot 2.200 \cdot 1,05^{-3} = 5.000$$

$$\Rightarrow X = \frac{5.000 \cdot 1,05^3 - 1,03^2 \cdot 2.200}{1,03^4} = 3.068,97$$

Il TIR del progetto B si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio finanziario

$$2.100 \cdot (1 + TIR)^{-1} + 1.200 \cdot (1 + TIR)^{-2} + 2.300 \cdot (1 + TIR)^{-3} = 5.000$$

Si ottiene per interpolazione  $TIR \approx 5,79\%$ .

Sulla base del criterio del TIR, l'investimento più conveniente è dato dal progetto B.

#### Esercizio 4.

Un'azienda per restituire in 6 anni un prestito di Euro 500.000 ha a disposizione due alternative:

- restituire la somma mediante un ammortamento a quote capitali costanti al tasso fisso del 10% annuo;
- restituire la somma sempre a quote capitali costanti, ma a un tasso annuo variabile pari a  $i = (12\%; 8\%; 10\%; 8\%; 6\%, 8\%) / (1; 2; 3; 4; 5; 6)$ .

Sulla base del criterio del tasso interno di costo, calcolare quale alternativa risulterà finanziariamente più conveniente.

Valutare nuda proprietà e usufrutto al tasso di valutazione  $i = 12\%$  effettivo annuo dell'alternativa più conveniente, dopo 4 anni e 2 mesi.

#### Risoluzione.

I piani completi nelle due alternative sono rispettivamente:

h	QC	QI	R	DR
0				500 000.00
1	83 333.33	50 000.00	133 333.33	416 666.67
2	83 333.33	41 666.67	125 000.00	333 333.33
3	83 333.33	33 333.33	116 666.67	250 000.00
4	83 333.33	25 000.00	108 333.33	166 666.67
5	83 333.33	16 666.67	100 000.00	83 333.33
6	83 333.33	8 333.33	91 666.67	0.00

h	QC	QI	R	DR
0				500 000.00
1	83 333.33	60 000.00	143 333.33	416 666.67
2	83 333.33	33 333.33	116 666.67	333 333.33
3	83 333.33	33 333.33	116 666.67	250 000.00
4	83 333.33	20 000.00	103 333.33	166 666.67
5	83 333.33	10 000.00	93 333.33	83 333.33
6	83 333.33	6 666.67	90 000.00	0.00

La prima alternativa possiede banalmente un tasso di costo del 10%. Per la seconda, dobbiamo risolvere l'equazione di equilibrio finanziario:

$$R_1 \cdot (1 + TIC)^{-1} + \dots + R_6 \cdot (1 + TIC)^{-6} = \sum_{k=1}^6 R_k \cdot (1 + TIC)^{-k} = 500.000$$

Si ottiene per interpolazione  $TIC \approx 9,53\%$ .

La seconda alternativa risulta perciò più conveniente.

Infine, determiniamo nuda proprietà e usufrutto al tasso di valutazione  $i = 12\%$  effettivo annuo della seconda alternativa, dopo 4 anni e 2 mesi. Otteniamo per definizione:

$$NP_{4+2/12}(12\%) = \frac{83.333,33}{1,12^{10/12}} + \frac{83.333,33}{1,12^{1+10/12}} = 143.523,02$$

$$U_{4+2/12}(12\%) = \frac{10.000,00}{1,12^{10/12}} + \frac{6.666,67}{1,12^{1+10/12}} = 14.514,78$$